pre Olimpiada Matemática Autonómica

Enunciados y Soluciones

11 y 12 de noviembre de 2023

Índice

1. Enunciados del nivel de iniciación

Problema 1. Considera un triángulo equilátero con vértices A, B y C, y sean D y E los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Se construye un cuadrado $ECFG$ con lado EC hacia el exterior del triángulo ABC. Determina razonadamente el valor del ángulo $\angle GDE$.

Problema 2. Sea n un número entero positivo. Marc tiene $2n$ cajas: una con una manzana, una con dos manzanas, una con tres manzanas... hasta una con $2n$ manzanas. (Formalmente, Marc tiene una caja con k manzanas para cada número entero k entre 1 y $2n$.)
Cada día que pasa, Marc abre exactamente una caja y come todas las manzanas que hay en ella. No obstante, si Marc come estrictamente más de $2n + 1$ manzanas en dos días consecutivos, le sientan mal. Demuestra que Marc tiene exactamente 2^n maneras distintas de comerse las manzanas sin que le sienten mal.

Problema 3. Encuentra todos los números enteros positivos a, b tales que

$$a^3 + b^3 + ab = (ab + 1)(a + b)$$

y demuestra que son los únicos.

Problema 4. Ardi y Dilla tienen una pizarra y un tablero de ajedrez, y en cada casilla del tablero hay escrito un número entero. Para cada una de las ocho filas del tablero, Ardi suma los ocho números escritos en ella y los apunta en la pizarra. Similarmente, para cada columna del tablero Dilla suma los números escritos en ella y los apunta en la pizarra.

Resulta, además, que los ocho números que ha escrito Ardi son iguales entre si, y que los ocho números que ha escrito Dilla también son iguales entre si. Demuestra que todos los números que hay escritos en la pizarra son iguales.

Problema 5. Decimos que un triángulo es *Pitagórico* si es rectángulo y la longitud de sus tres lados son números enteros.

- Demuestra que no existe ningún triángulo Pitagórico tal que sus tres lados tengan longitudes impares.
- ¿Existe algún triángulo Pitagórico de tal manera que sus catetos tengan longitud impar? Si es así, da un ejemplo, y si es que no, demuéstralo.

Problema 6. Sean a, b, c y d cuatro números reales positivos tales que

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{a}.$$

Demuestra que $a = b = c = d$.

2. Enunciados del nivel avanzado

Problema 1. Sea n un número entero positivo. Marc tiene $2n$ cajas: una con una manzana, una con dos manzanas, una con tres manzanas... hasta una con $2n$ manzanas. (Formalmente, Marc tiene una caja con k manzanas para cada número entero k entre 1 y $2n$.)
Cada día que pasa, Marc abre exactamente una caja y come todas las manzanas que hay en ella. No obstante, si Marc come estrictamente más de $2n+1$ manzanas en dos días consecutivos, le sientan mal. Demuestra que Marc tiene exactamente 2^n maneras distintas de comerse las manzanas sin que le sienten mal.

Problema 2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo, y sean D, E, F tres puntos en los lados BC, AC y AB, respectivamente, de forma que el cuadrilátero $AEDF$ es cíclico. Sean O_B y O_C los circuncentros de los triángulos $\triangle BDF$ y $\triangle CDE$, respectivamente. Finalmente, sea D' un punto sobre el lado BC tal que $BD' = CD$. Demuestra que los triángulos $\triangle BD'O_B$ y $\triangle CD'O_C$ tienen la misma área.

Problema 3. Encuentra todos los enteros positivos l para los que la ecuación

$$a^3 + b^3 + ab = (lab + 1)(a + b)$$

tiene alguna solución con a y b enteros positivos.

Problema 4. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos tales que

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = x_3 + \frac{1}{x_4} = \cdots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1}.$$

Demuestra que $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero positivo, y sea $P_1P_2P_3\ldots P_{2n}$ un polígono (no necesariamente convexo) de $2n$ lados, de tal manera que no tenga dos lados paralelos. Para un punto P en el plano, y un entero positivo $i \leq 2n$, decimos que i es un índice P-*bueno* si $PP_i > PP_{i+1}$, y decimos que i es un índice P-*malo* si $PP_i < PP_{i+1}$, donde denotamos $P_{2n+1} = P_1$.
Demuestra que existe un punto P de tal manera que haya el mismo número de índices P-buenos que de índices P-malos.

Problema 6. Sea Ω una circunferencia, y sean A, B, C, D y K puntos distintos sobre Ω, en ese orden, y tales que las rectas BC y AD son paralelas. Sea $A' \neq A$ un punto sobre la recta AK tal que $BA = BA'$. Similarmente, sea $C' \neq C$ un punto sobre CK tal que $DC = DC'$. Demuestra que los segmentos AC y $A'C'$ tienen la misma longitud.

3. Problema 1 iniciación

Considera un triángulo equilátero con vértices A, B y C, y sean D y E los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Se construye un cuadrado $ECFG$ con lado EC hacia el exterior del triángulo ABC. Determina razonadamente el valor del ángulo $\angle GDE$.

Solución. La observación clave es que DEG es un triángulo isósceles con $ED = EG$. Esto sigue de observar que

$$ED = EA = EC = EG.$$

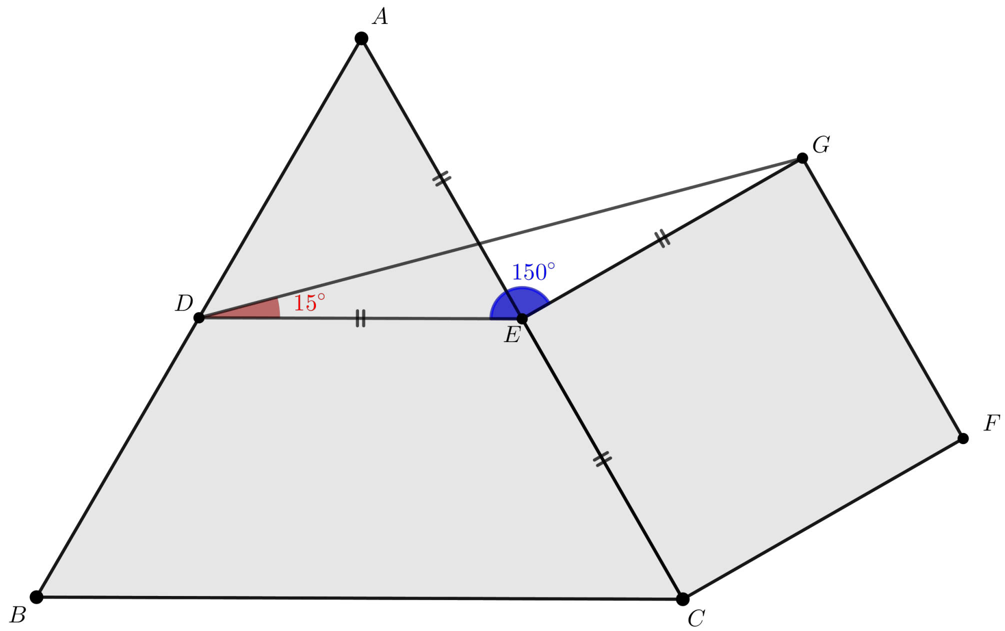
La primera igualdad se da ya que $\triangle ADE$ es un triángulo equilátero, la segunda porque E es el punto medio de AC y la tercera porque $ECFG$ es un cuadrado. Observa además que

$$\angle DEG = \angle DEA + \angle AEG = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$

Por tanto, sabemos que $\angle DEG = 150^\circ$, y que DEG es isósceles en E, implicando que $\angle GDE = \angle DGE$. Por tanto, como los ángulos de cualquier triángulo suman 180°, obtenemos que

$$180^\circ = \angle DEG + \angle EGD + \angle GDE = 150^\circ + 2\angle GDE$$

y por tanto $\angle GDE = 15^\circ$. □



Comentarios. Este problema también se puede resolver de otras formas. Por ejemplo, es viable atacarlo con coordenadas cartesianas, y calcular el ángulo $\angle GDE$ usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{DG}$. No obstante, estas soluciones son bastante más complicadas que la oficial.

4. Problema 2 iniciación, problema 1 avanzado

Sea n un número entero positivo. Marc tiene $2n$ cajas: una con una manzana, una con dos manzanas, una con tres manzanas... hasta una con $2n$ manzanas. (Formalmente, Marc tiene una caja con k manzanas para cada número entero k entre 1 y $2n$.)
Cada día que pasa, Marc abre exactamente una caja y come todas las manzanas que hay en ella. No obstante, si Marc come estrictamente más de $2n+1$ manzanas en dos días consecutivos, le sientan mal. Demuestra que Marc tiene exactamente 2^n maneras distintas de comerse las manzanas sin que le sienten mal.

Solución 1 (Via inducción). Usaremos inducción en n, con caso base trivial $n = 1$.

Claim. O bién Marc come $2n$ manzanas el primer día y solo una el segundo, o bién come n manzanas el último día y solo una el penúltimo.
Demostración. Observa que el día antes (si lo hubiere) de comer $2n$ manzanas solo puede ser el de comer una manzana, y el día después de comer una manzana (si lo hubiere) también puede ser solo el de comer una manzana. Por tanto, o bién come $2n$ el primer día, no hay día previo, y el segundo día come una; o bién come n el último día, no hay día posterior, y el penúltimo día come una manzana. ■

Marc tiene 2 maneras de elegir los días de una manzana y $2n$ manzanas, y le quedarán $2n-2$ días contiguos por elegir. Pero observa que los $2n-2$ días que quedan son equivalentes al caso $n-1$ del problema original. Esto es porqué el día de una sola manzana no afecta, y porqué

$$a + b \leq 2n + 1 \iff (a-1) + (b-1) \leq 2n - 1 = 2(n-1) + 1.$$

Por tanto, podemos pensar en las $2n-2$ manzanas que quedan como equivalentes al caso $n-1$, y por hipótesis de inducción Marc tiene 2^{n-1} maneras de comérselas. Como había dos maneras de elegir cuando comer las cajas con $2n$ y una manzana, la respuesta para el caso n es $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, tal como queríamos demostrar. □

Solución 2 (Sin inducción). Similarmente a la solución anterior, observamos que o bién Marc come las cajas de $2n$ y 1 manzanas el primer y segundo día, respectivamente, o bién el último y penúltimo día. Por lo tanto tenemos dos opciones, que Marc coma estas dos cajas en los dos primeros o dos últimos días.

Ahora consideremos los $2n-2$ cajas restantes. Notemos que, de la misma manera, las cajas con $2n-1$ y 2 manzanas se tendrán que comer o en los dos primeros o los dos últimos de estos días restantes, ya que de otra manera Marc comería una caja de $a \geq 3$ manzanas en un día consecutivo con la caja de $2n-1$ manzanas, y le sentarían mal. En concreto, deberá comer o bien las $2n-1$ el primero de estos días y 1 el segundo, o bien $2n-1$ el últimoo y 1 el penúltimo.

Es así, que si repetimos este razonamiento, y después de escoger el tiempo en el que se comen dos cajas pasamos a considerar los días en los que aún no se ha atribuido ninguna caja, llegaremos a que siempre las cajas con $2n-i$ manzanas e $i+1$ manzanas se deberán comer en días consecutivos, y en concreto en los primeros o los últimos de los días restantes.

Por lo tanto, para cada par $(2n, 1), (2n-1, 2), \dots (2n-i, i+1) \dots$ podemos escoger si se comen en los primeros o últimos días restantes. Por lo tanto, como tenemos n pares y 2 opciones para cada par, el número total de maneras que tenemos de atribuirlos será de 2^n, que es exactamente lo que queríamos demostrar, y por lo tanto ya hemos acabado. $\square$

Comentarios. La idea clave de este problema era darse cuenta de como tenía que ser la distribución de las cajas. Una vez se tenía una idea de como era esta distribución, no era difícil acabar y ver que el número de maneras era 2^n. En este problema era muy importante estudiar los casos pequeños para conseguir intuición.

5. Problema 3 iniciación

Encuentra todos los números enteros positivos a, b tales que

$$a^3 + b^3 + ab = (ab + 1)(a + b)$$

y demuestra que son los únicos.

Solución 1. Empecemos por notar que la igualdad dada es equivalente a

$$a^3 + b^3 + ab = a^2b + ab^2 + a + b$$

Empezaremos demostrando que $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ para todo entero positivo a y b. Notemos que esto se debe a

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \iff a^2(a - b) + b^2(b - a) \geq 0 \iff (a^2 - b^2)(a - b) \geq 0.$$

Pero notemos que $(a^2 - b^2)(a - b) = (a - b)^2(a + b)$. Claramente $(a - b)^2 \geq 0$, y también $(a + b) \geq 0$, y por lo tanto la desigualdad queda demostrada. A su vez, notemos que para $a \neq b$ claramente tenemos que $(a^2 - b^2)(a - b) > 0$, y por lo tanto $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$, y que para $a = b$ obtenemos la igualdad $a^3 + b^3 = a^2b + ab^2$. Una vez demostrado esto notemos que, volviendo a la ecuación original obtenemos:

$$a^2b + ab^2 + a + b = a^3 + b^3 + ab \geq a^2b + ab^2 + ab \implies a + b \geq ab.$$

Pero podemos reagrupar esta expresión como

$$a + b \geq ab \iff 1 \geq ab - a - b + 1 \iff 1 \geq (a - 1)(b - 1).$$

Ahora, claramente, si ni a ni b son iguales a 1 obtenemos que la única solución será $(a, b) = (2, 2)$, ya que de otra manera $(a - 1)(b - 1) > 1$, que contradice la desigualdad encontrada. Por lo tanto, solo queda estudiar el caso en el que una de las variables es exactamente 1. Como la expresión original es simétrica en a y b, asumamos sin pérdida de generalidad que $a = 1$. En este caso, obtenemos

$$1 + b^3 + b = b + b^2 + 1 + b \iff b(b^2 - b - 1) = 0,$$

que es automático ver que no tiene solución para b entero positivo. Por lo tanto ya hemos acabado, la única solución es $(a, b) = (2, 2)$. □

Solución 2. Recordemos la factorización

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Teniendo esto en cuenta, podemos escribir la ecuación original como

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab = (ab + 1)(a + b) \iff ab = (a + b)(-a^2 - b^2 + 2ab + 1).$$

Por lo tanto, $(a+b)$ debe dividir a ab. Volviendo a la ecuación original, y reagrupando términos, llegamos a

$$\begin{aligned} & ab-a-b = ab(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ \iff & ab-a-b = ab(a+b)-(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right) \\ \iff & ab-a-b = (a+b)^2-2ab(a+b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $(a+b)$ divide a ab, tenemos que el lado derecho de la igualdad es divisible por $(a+b)^2$. Es así que hemos encontrado que

$$(a+b)^2 \mid ab-a-b.$$

Pero claramente $(a+b)^2 > ab > ab-a-b$, lo que implica que, para que se cumpla la condición de divisibilidad, $ab-a-b=0$ y por tanto $(a-1)(b-1)=1$. Pero la única solución para enteros de esta ecuación es $a=b=2$, y por lo tanto hemos acabado. $\square$

Comentarios. Una versión más difícil de este problema apareció como problema 3 del nivel avanzado. Aunque esta versión del problema admite tanto soluciones via divisibilidad como soluciones via desigualdades, la versión difícil solo sale usando divisibilidad.

6. Problema 4 iniciación

Ardi y Dilla tienen una pizarra y un tablero de ajedrez, y en cada casilla del tablero hay escrito un número entero. Para cada una de las ocho filas del tablero, Ardi suma los ocho números escritos en ella y los apunta en la pizarra. Similarmente, para cada columna del tablero Dilla suma los números escritos en ella y los apunta en la pizarra.

Resulta, además, que los ocho números que ha escrito Ardi son iguales entre si, y que los ocho números que ha escrito Dilla también son iguales entre si. Demuestra que todos los números que hay escritos en la pizarra son iguales.

Solución. Supón que los ocho números que ha escrito Ardi todos valen A, y que los ocho que ha escrito Dilla todos valen B. Observa que tenemos que la suma de todos los números del tablero es

$$\underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{8} = 8A,$$

ya que la suma de todos los números escritos por Ardi es igual a la suma de todo el tablero. Pero, por el mismo argumento aplicado a Dilla, obtenemos que la suma de todos los números del tablero es

$$\underbrace{B + B + B + \cdots + B}_{8} = 8B.$$

Por tanto, obtenemos que

$$8A = \text{Suma de todos los números del tablero} = 8B,$$

y por tanto $A = B$, implicando que todos los números de la pizarra son iguales. $\square$

7. Problema 5 iniciación

Decimos que un triángulo es *Pitagórico* si es rectángulo y la longitud de sus tres lados son números enteros.

- Demuestra que no existe ningún triángulo Pitagórico tal que sus tres lados tengan longitudes impares.
- ¿Existe algún triángulo Pitagórico de tal manera que sus catetos tengan longitud impar? Si es así, da un ejemplo, y si es que no, demuéstralo.

Solución. Supón que a, b, c son los lados del triángulo Pitagórico, siendo c la hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$.

Primer apartado. Observa que si a, b, c fueran todos impares, entonces a^2, b^2 y c^2 también serían impares. Pero entonces $a^2 + b^2$ sería par y c^2 sería impar, haciendo imposible la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

Segundo apartado. La respuesta es no. Supón que a, b, c forman un triángulo Pitagórico con catetos a, b impares. Por el apartado anterior, sabemos que como a y b son impares entonces c tiene que ser par. Si c es par, entonces c^2 es múltiplo de cuatro y por tanto $a^2 + b^2$ es también múltiplo de 4. No obstante, sabemos que

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \iff (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$

Antes hemos visto que $a^2 + b^2$ es múltiplo de cuatro. Como a y b son impares, $a + b$ es par y por tanto $(a+b)^2$ es múltiplo de cuatro. Así, $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$ es una resta de dos múltiplos de cuatro, y por tanto $2ab$ es en sí mismo múltiplo de cuatro. Pero $2ab$ es dos multiplicado por dos números impares, por tanto no puede ser mútliplo de 4. Hemos obtenido una contradicción y, en consecuencia, nuestras suposiciones iniciales eran falsas. Sigue que no existe ningún triángulo Pitagórico con catetos impares. $\square$

8. Problema 6 iniciación

Sean a, b, c y d cuatro números reales positivos tales que

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{a}.$$

Demuestra que $a = b = c = d$.

Solución. La observación clave es la siguiente:

Claim. Si $a > b$ entonces $b > c$, y si $a < b$ entonces $b < c$.
Demostración. Observa que podemos reordenar

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} \iff a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}.$$

Si $a > b$ entonces $a - b$ es positivo, implicando que $\frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ es positivo también. Por tanto, resulta que

$$\frac{b-c}{bc} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} > 0$$

y como b y c son positivos, concluimos que $b - c$ es positivo, y por tanto $b > c$. El caso contrario es similar: si $a < b$ entonces $a - b$ es negativo, y sigue que $\frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ es también negativo, implicando que $b - c$ es negativo y por tanto $b < c$. ■

Podemos resolver el problema aplicando este claim en cadena. Usamos un argumento por contradicción. Supongamos que a, b, c, d no son todos iguales, y por tanto hay dos elementos entre ellos que son distintos. Así pues, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a \neq b$. En el caso que $a > b$ obtenemos que

$$a > b \implies b > c \implies c > d \implies d > a$$

y por tanto $a > b > c > d > a$. Pero esto nos dice que $a > a$, obviamente falso. Similarmente, si suponemos que $a < b$ obtenemos que

$$a < b \implies b < c \implies c < d \implies d < a$$

y por tanto $a < a$, contradicción. Como ambos casos llegan a contradicción, sigue que nuestra asunción inicial era falsa, y por tanto $a = b$, De manera análoga demostramos $b = c$, $c = d$ y $d = a$, demostrando así que $a = b = c = d$. □

Comentarios. El problema 4 del nivel avanzado es una generalización obvia de este problema, que se resuelve de una manera similar. No obstante, esta versión es menos abstracta, y más susceptible a acercamientos con mucho cálculo.

9. Problema 2 avanzado

Sea $\triangle ABC$ un triángulo, y sean D, E, F tres puntos en los lados BC, AC y AB, respectivamente, de forma que el cuadrilátero $AEDF$ es cíclico. Sean O_B y O_C los circuncentros de los triángulos $\triangle BDF$ y $\triangle CDE$, respectivamente. Finalmente, sea D' un punto sobre el lado BC tal que $BD' = CD$. Demuestra que los triángulos $\triangle BD'O_B$ y $\triangle CD'O_C$ tienen la misma área.

Solución. Empezamos demostrando el siguiente resultado estructural de la configuración:

Claim. Los círculos (BDF) y (CDE) son tangentes en D.
Demostración. Demostraremos que D, O_B y O_C están alineados. Nota que como $AFDE$ es cíclico,

$$\angle BFD = \angle DFA = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - \angle DEC.$$

Si $\angle BFD = \angle DEC = 90^\circ$ entonces O_B y O_C ambos están en BC, siguiendo que $\triangle BD'O_B$ y $CD'O_C$ ambos tienen área cero. De lo contrario, o bien $\angle BFD > 90^\circ > \angle DEC$ o $\angle DEC > 90^\circ > \angle BFD$. Usando simetría si es necesario, asumiremos sin pérdida de generalidad que $\angle DEC > 90^\circ > \angle BFD$, para así ahorrarnos posibles problemas de configuración. Sigue que

$$\angle O_B DB = 90^\circ - \angle BFD = 90^\circ - (180^\circ - \angle DEC) = \angle DEC - 90^\circ = \angle DO_C C$$

implicando que O_B, D y O_C están alineados, y por tanto la tangencia sigue. ■

Para acabar, observa que CO_C es paralela a BO_B, ya que

$$\angle O_C CD = \angle O_C DC = \angle O_B DB = \angle O_B BD.$$

Por tanto, usando el teorema de Tales y la definición de D', sabemos que

$$\frac{CO_C}{BO_B} = \frac{DC}{DB} = \frac{D'B}{D'C}$$

implicando que $CO_C \cdot D'C = BO_B \cdot D'B$. Por tanto, usando que el área de un triángulo es un medio del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman, resulta que

$$\begin{aligned}
\text{Área}[\triangle BO_B D'] &= \frac{1}{2} \cdot BO_B \cdot BD' \cdot \sin \angle O_B BD' \\
&= \frac{1}{2} \cdot BO_B \cdot BD' \cdot \sin \angle O_C CD' \\
&= \frac{1}{2} \cdot CO_C \cdot CD' \cdot \sin \angle O_C CD' \\
&= \text{Área}[\triangle CO_C D']
\end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar. □

Comentarios. Es posible también resolver el problema usando la más común fórmula de “base por altura entre dos” para el área del triángulo. Si h_B y h_C son respectivamente las distancias desde O_B y O_C a la recta BC, entonces por Tales

$$\frac{h_B}{BD} = \frac{h_C}{CD}$$

implicando que $h_B \cdot BD' = h_C \cdot CD'$ y resolviendo el problema.

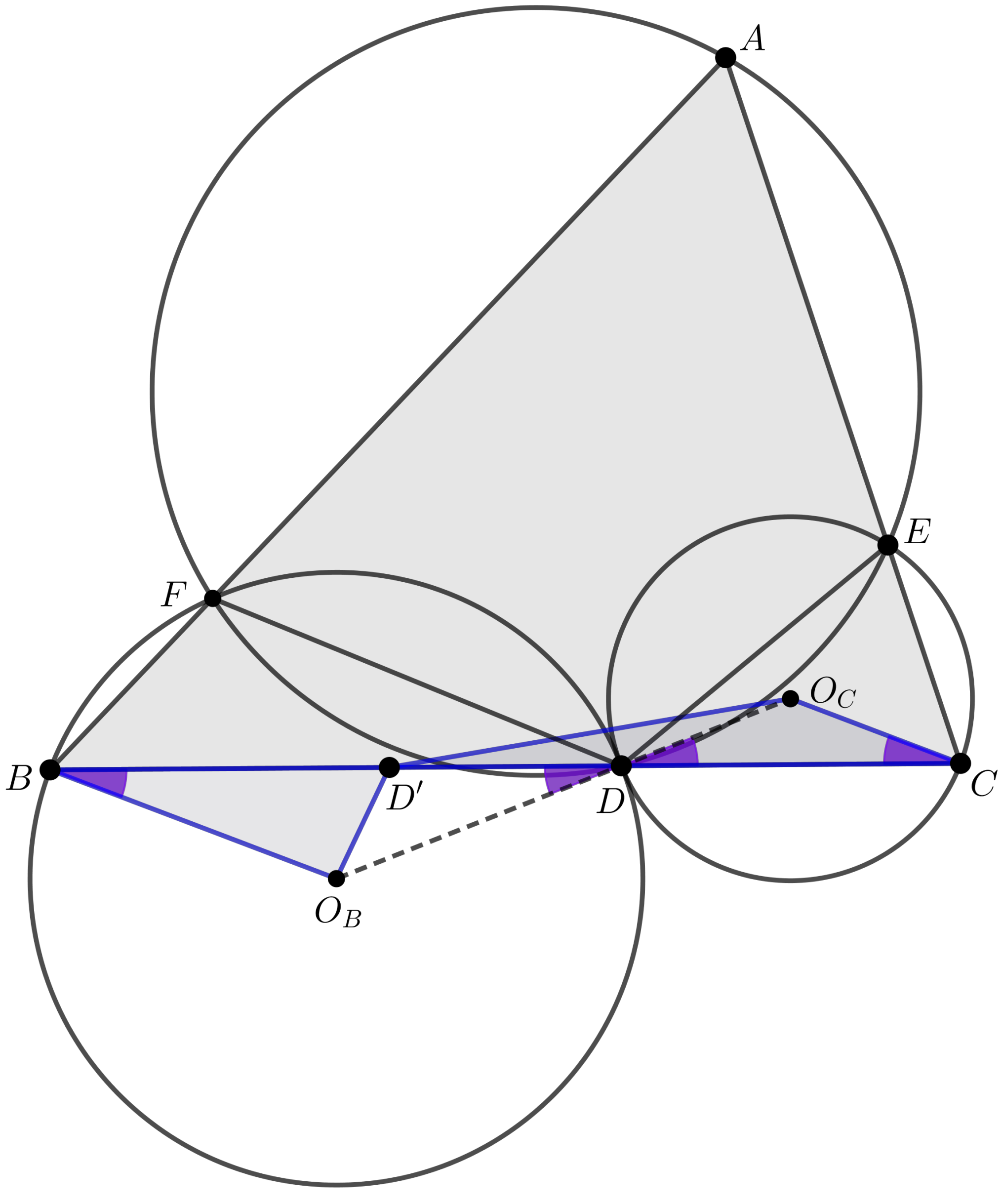


Figura 1: Diagrama para el problema 2.

10. Problema 3 avanzado

Encuentra todos los enteros positivos l para los que la ecuación

$$a^3 + b^3 + ab = (lab + 1)(a + b)$$

tiene alguna solución con a y b enteros positivos.

Solución 1. La respuesta es que la ecuación solo tiene solución si $l = 1$. Para $l = 1$, podemos seleccionar $a = b = 2$ y la igualdad se cumple. En general, demostraremos que $(a, b, l) = (2, 2, 1)$ es la única solución de la ecuación. Definimos $p = ab$ y $s = a + b$. Recuerda la factorización

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = s(s^2 - 3p).$$

Por tanto, sigue que

$$s(s^2 - 3p) + p = a^3 + b^3 + ab = (lab + 1)(a + b) = (lp + 1)s.$$

Podemos reordenar esta igualdad como

$$s^3 + p(1 - 3s) = pls + s \iff s^3 - s = p(ls + 3s - 1).$$

Denota $k = l + 3 \geq 4$. Como $s^3 - s = p(ks - 1)$, sigue que $s^3 - s$ es múltiplo de $ks - 1$. Pero observa que

$$\gcd(s, ks - 1) = \gcd(s, ks - 1 - ks) = \gcd(s, -1) = 1$$

y por tanto $ks - 1$ y s son coprimos. Análogamente se demuestra que k y $ks - 1$ también son coprimos. Así pues, sigue que como $s^3 - s = s(s^2 - 1)$, entonces $ks - 1$ divide a $s^2 - 1$. Como k y s son inversos módulo $ks - 1$, obtenemos que

$$0 \equiv s^2 - 1 \equiv \frac{1}{k^2} - 1 \equiv \frac{k^2 - 1}{k^2} \pmod{ks - 1}.$$

Como k y $ks - 1$ son coprimos, resulta que $ks - 1$ divide a $k^2 - 1$. Vamos a demostrar que $k = s$ por contradicción. Si asumimos que $k < s$, entonces $ks - 1 > k^2 - 1$. Por tanto, como $ks - 1 \mid k^2 - 1$, sigue necesariamente que $k^2 - 1 = 0$ contradiciendo que $k \geq 4$. Similarmente, si $s < k$ entonces $ks - 1 > s^2 - 1$ pero $ks - 1 \mid s^2 - 1$, implicando que s es o 1 o -1. Pero como $s = a + b \geq 1 + 1 = 2$, esto es obviamente contradictorio. Por tanto obtenemos que $k = s$. Ahora basta con volver a la ecuación y sustituir $k = s$, dando que

$$s^3 - s = p(ks - 1) = p(s^2 - 1)$$

y por tanto $p = s$, que equivale a $ab = a + b$. Si $a = 1$, vemos que $b = b + 1$, obviamente falso y, si $b = 1$, sacamos $a = a + 1$, también falso. Por tanto $a, b \geq 2$, y obtenemos que

$$ab = (a - 1)(b - 1) + a + b - 1 \geq 1 + a + b - 1 = a + b.$$

Como $ab = a+b$, se ha de dar la igualdad en la desigualdad, implicando que $(a-1)(b-1) = 1$ y por tanto $a = b = 2$. Sigue que $l = k - 3 = s - 3 = 1$, y por tanto la única solución es $(a, b, l) = (2, 2, 1)$. $\square$

Solución 2. Defimos $d = \gcd(a, b)$, y ahora escribimos $a = dx$ y $b = dy$, donde claramente x e y son enteros positivos coprimos. Ahora, la ecuación se reescribe de la siguiente manera, donde se divide por d en ambos lados, y se usa la factorización $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$:

$$d^2(x + y)(x^2 - xy + y^2) + dxy = (ld^2xy + 1)(x + y).$$

Ahora, notemos que, mirando módulo $x + y$ obtenemos que $x + y \mid dxy$. Como claramente $\gcd(x + y, y) = \gcd(x + y, x) = 1$, se obtiene que $x + y \mid d$. Pero a su vez si miramos módulo d tenemos que $d \mid x + y$, y por lo tanto concluimos que $d = x + y$, ya que d es coprimo con $ld^2xy + 1$.

Volviendo a sustituir, y dividiendo por $(x + y)$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos la expresión

$$(x + y)^2(x^2 - xy + y^2) + xy = l(x + y)^2xy + 1.$$

Es así, que mirando módulo $(x + y)^2$ tenemos que $(x + y)^2 \mid xy - 1$. Pero como $(x + y)^2 > 2xy > xy - 1 \geq 0$ implica que $xy - 1 = 0 \implies x = y = 1 \implies d = x + y = 2$. Por lo tanto, $a = b = 2$, lo que nos implica, despejando trivialmente en la ecuación original, que $l = 1$. Por lo tanto concluimos que el único entero positivo l para el que existen a y b cumpliendo la encuación dada es $l = 1$. $\square$

Comentarios. Como se ve a simple vista, este problema es una generalización del problema 3 del nivel de iniciación. No obstante, esta versión no admite soluciones via desigualdades, cosa que dificulta bastante el problema.

Ambas soluciones presentadas tienen por idea clave una substitución: la primera usa $p = ab$ y $s = a + b$, y la segunda usa $a = dx$ y $b = dy$, donde $d = \gcd(a, b)$. Estas substituciones son relativamente comunes, por lo que es conveniente recordarlas.

11. Problema 4 avanzado

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos tales que

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = x_3 + \frac{1}{x_4} = \cdots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1}.$$

Demuestra que $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Solución. Denota $x_{n+1} = x_1$ y $x_{n+2} = x_2$. El claim principal es el siguiente.

Claim. Sea i un entero tal que $1 \leq i \leq n$. Se cumple que $x_i < x_{i+1}$ si y solo si $x_{i+1} < x_{i+2}$.
Demostración. Manipulando expresiones, resulta que

$$x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = x_{i+1} + \frac{1}{x_{i+2}} \iff x_i - x_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x_{i+2}}{x_{i+1}x_{i+2}}$$

implicando el claim ya que $x_{i+1}x_{i+2}$ es siempre positivo. ■

Por tanto, si $x_i < x_{i+1}$ entonces $x_i < x_{i+1} < x_{i+2}$ y si $x_i > x_{i+1}$ entonces $x_i > x_{i+1} > x_{i+2}$. Ahora supón por contradicción que existe una k tal que $x_k \neq x_{k+1}$. Podemos aplicar el claim repetidamente para obtener una cadena de desigualdades. Si $x_k < x_{k+1}$, sigue que

$$x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < x_{k+3} < x_{k+4} < \ldots < x_{k-1} < x_k$$

implcando que $x_k < x_k$ y contradicción. Similarmente, si $x_k > x_{k+1}$, se obtiene que

$$x_k > x_{k+1} > x_{k+2} > x_{k+3} > x_{k+4} > \ldots > x_{k-1} > x_k$$

y contradicción. Por tanto no exite k tal que $x_k \neq x_{k+1}$, y el resultado sigue. □

12. Problema 5 avanzado

Sea $n \geq 2$ un entero positivo, y sea $P_1P_2P_3 \dots P_{2n}$ un polígono (no necesariamente convexo) de $2n$ lados, de tal manera que no tenga dos lados paralelos. Para un punto P en el plano, y un entero positivo $i \leq 2n$, decimos que i es un índice P-*bueno* si $PP_i > PP_{i+1}$, y decimos que i es un índice P-*malo* si $PP_i < PP_{i+1}$, donde denotamos $P_{2n+1} = P_1$.
Demuestra que existe un punto P de tal manera que haya el mismo número de índices P-buenos que de índices P-malos.

Solución. Sean $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n}$ las mediatrices de los segmentos P_1P_2, P_2P_3, $\dots$, $P_{2n}P_1$, respectivamente. Sea ℓ una recta no paralela a ninguna ℓ_i, y define H_i como la intersección de ℓ y ℓ_i para todo $i = 1, 2, \dots, 2n$. Como no hay $i \neq j$ tal que ℓ_i y ℓ_j sean paralelas, seleccionando ℓ suficientemente lejos del polígono podemos asegurar que $H_1, H_2, \dots, H_{2n}$ son distintos.

Decimos que un punto P es *correcto* si P está sobre ℓ pero es distinto de todos los H_i. Observa que si P es correcto, el número de índices P-buenos más el número de índices P-malos es $2n$, por tanto basta con encontrar un P correcto con n índices P-buenos. Sean A y B dos puntos correctos de ℓ tales que todos los H_i se encuentran en el interior del segmento AB.

Claim. El número de índices A-buenos es igual al número de índices B-malos.
Demostración. Observa que para todo índice i con $1 \leq i \leq 2n$, los puntos A y B se encuentran en lados distintos de ℓ_i. Por tanto $AP_i > AP_{i+1}$ si y solo si $BP_i < BP_{i+1}$, implicando el resultado. ■

Ahora, la idea es "desplazar" A hasta B, y ver el cambio en el número de índices A-buenos. Formalmente, observa que si P y Q son puntos correctos tales que hay exactamente un H_i en el segmento PQ, entonces la diferencia entre el número de índices P-buenos y el número de índices Q-buenos es o 1 o -1. Como por el claim el número de índices A-buenos más el número de índices B-buenos suma $2n$, sigue que existe un punto correcto P entre A y B tal que el número de índices P-buenos es n, tal como queríamos demostrar. □

Comentarios. La idea clave del problema es darnos cuenta de que podemos mover el punto P para analizar como varía el número de índices P-buenos y P-malos. Esto se puede formalizar considerando las mediatrices de los segmentos P_iP_{i+1} y considerando una recta muy lejana al polígono, pero hay otras maneras de formalizar la idea clave.

13. Problema 6 avanzado

Sea Ω una circunferencia, y sean A, B, C, D y K puntos distintos sobre Ω, en ese orden, y tales que las rectas BC y AD son paralelas. Sea $A' \neq A$ un punto sobre la recta AK tal que $BA = BA'$. Similarmente, sea $C' \neq C$ un punto sobre CK tal que $DC = DC'$. Demuestra que los segmentos AC y $A'C'$ tienen la misma longitud.

Solución 1. El claim principal es que $A'BDC'$ es un paralelogramo. Para ver esto, demostraremos que los segmentos $A'B$ y $C'D$ son paralelos y de la misma longitud. Observa que $ABCD$ es un trapecio isósceles con $AB = CD$. Por tanto, obtenemos que

$$A'B = AB = CD = C'D.$$

De otro lado, podemos mover ángulos para demostrar que las rectas $A'B$ y $C'D$ son paralelas. En particular, basta con demostrar que $\angle A'BD + \angle BDC' = 180°$. Usando ángulos dirigidos módulo $180°$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\angle A'BD + \angle BDC' &= \angle A'BA + \angle ABD + \angle CDC' - \angle CDB \\
&= 180° - 2\angle BAA' + \angle ABD + 180° - 2\angle C'CD - \angle CDB \\
&= 360° + \angle ABD - \angle CDB - 2(180° - \angle KAB) - 2\angle KCD \\
&= \angle ABD - \angle CDB + 2\angle KAB - 2\angle KCD.
\end{aligned}$$

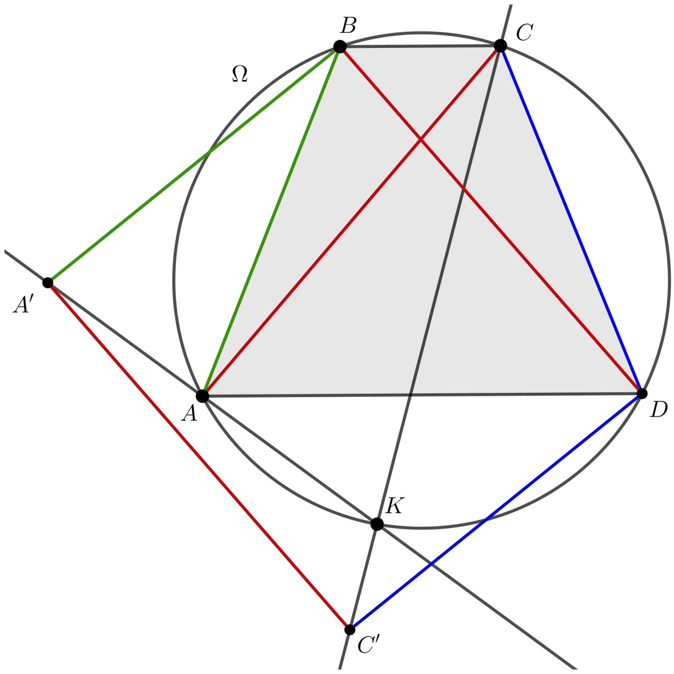
Miramos estos ángulos en términos de arcos sobre la circunferéncia Ω: si X, Y están sobre Ω, denota por $\angle XY$ el ángulo del arco que va de X hasta Y en sentido antihorário sobre Ω, visto desde otro punto de Ω que no esté sobre dicho arco. Usando que $\angle BA = \angle DC$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\angle A'BD + \angle BDC' &= \angle AD - \angle CB + 2\angle KB - 2\angle KD \\
&= \angle AD - \angle CB + 2\angle DB \\
&= \angle AD - \angle CB + 2\angle DC + 2\angle CB \\
&= \angle AD + \angle DC + \angle CB + \angle BA.
\end{aligned}$$

Como estos últimos ángulos cubren toda la circunferéncia, obtenemos que

$$\angle A'BD + \angle BDC' = 180°,$$

tal como queríamos demostrar. Sigue que $A'B$ y $C'D$ son paralelas, y por tanto $A'BDC'$ es un paralelogramo y el problema sigue. $\square$



Solución 2 (números complejos). Usaremos números complejos con Ω como la circunferencia unitaria. Como $ABCD$ es un trapecio isósceles, las mediatrices de BC y AD son la misma recta. Define el eje real como esa recta. Identificamos cada punto con el número complejo, que escribiremos en mínuscula. Sigue que $b = \overline{c} = \frac{1}{c}$ y $d = \overline{a} = \frac{1}{a}$. Sean X e Y las proyecciones de B y D sobre AK y CK, respectivamente. Podemos calcular

$$x = \frac{1}{2}\left(a + b + k - \frac{ak}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{c} + k - ack\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(c + d + k - \frac{ck}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{a} + k - ack\right).$$

Nota que como X es el punto medio de AA', sigue que $x = \frac{a+a'}{2}$, y por tanto deducimos que

$$a' = 2x - a = \frac{1}{c} + k - ack.$$

Similarmente, usando que Y es el punto medio de C y C', se obtiene que

$$c' = 2y - c = \frac{1}{a} + k - ack.$$

Ahora acabar es un momento, ya que

$$a' - c' = \frac{1}{c} + k - ack - \left(\frac{1}{a} + k - ack\right) = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = b - d$$

implicando que el vector $\overrightarrow{A'C'}$ es idéntico al vector $\overrightarrow{BD}$. Por tanto, como $ABCD$ es un trapecio isósceles, resulta que $A'C' = BD = AC$ y hemos acabado. $\square$

Solución 3 (simetría espiral). La idea clave es considerar la rotohomotecia que manda A a A' y C a C'. A lo largo de toda la solución usaremos ángulos dirigidos módulo 180°. En particular, empezamos con el claim siguiente.

Claim. Existe un punto P en Ω tal que $PD \perp CK$ y $PB \perp AK$.
Demostración. Sea $P \in \Omega$ tal que $BP \perp AK$. Sigue que

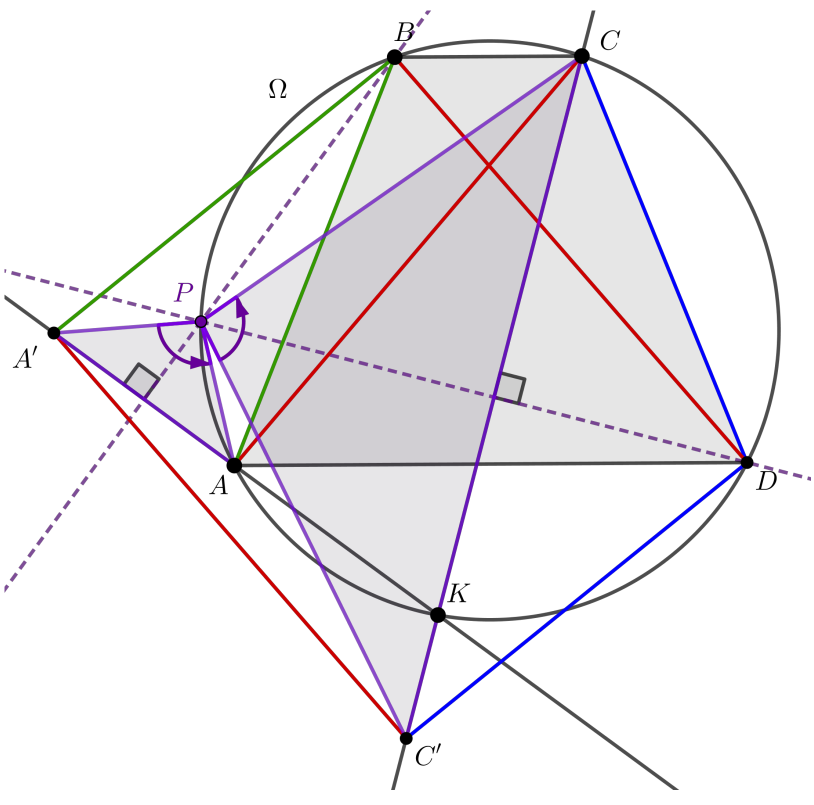
$$\angle PDK = \angle PBK = 90° - \angle BKA = 90° - \angle DKC,$$

implicando que DP es perpendicular a CK. ■

Ahora, como $BA = BA'$ y $BP \perp AA'$ sigue que $PA = PA'$. Similarmente se obtiene que $PC = PC'$. Observa que los ángulos $\angle APA'$ y $\angle CPC'$ son iguales, ya que

$$\angle A'PA = -2\angle APB = 2\angle DPC = \angle C'PC.$$

Así pues, como $PA = PA'$, $PC = PC'$ y los ángulos dirigidos $\angle APA'$ y $\angle CPC'$ son iguales, sigue que existe una rotación de centro P mandando A a A' y C a C'. Como esta rotación manda el segmento AC al segmento $A'C'$, sigue que $AC = A'C'$ tal como queríamos demostrar. □



Comentarios. Aunque las soluciones oficiales usen ángulos dirigidos para evitar los problemas de configuración, los criterios de corrección no han restado puntos a las soluciones correctas que no tuvieran en cuenta dichos problemas.